文章编号:1007-2985(2012)02-0007-03

关于广义 Smarandache 和函数的均值*

黄 炜

(宝鸡职业技术学院基础部,陕西 宝鸡 721013)

摘 要:利用初等方法、解析方法和高斯取整函数的性质,研究了广义 Smarandache 和函数 $AS(n,m,k)$ 的均值性质,给出一个有趣的渐近公式.

关键词:广义 Smarandache 和函数;均值;初等方法;解析方法;渐近公式

中图分类号:O156.4 文献标志码:A DOI:10.3969/j.issn.1007-2985.2012.02.002

对于任意正整数 n 及给定的整数 $k>1$,M. Bencze 曾定义了 2 个如下 Smarandache 和函数 $S(n,k)$ 及 $AS(n,k)$:

$$S(n,k)=\sum_{\substack{|n-ki|<n\\ i=0,1,2,\cdots}}(n-ki),AS(n,k)=\sum_{\substack{|n-ki|<n\\ i=0,1,2,\cdots}}|n-ki|.$$

文献[1-2]利用初等方法及取整函数的性质研究了包含 $S(n,k)$ 及 $AS(n,k)$ Dirichlet 级数计算问题,并给出了具体的计算公式. 文献[3]研究了 Smarandache 和函数 $S(n,k)$ 及 $AS(n,k)$ 的均值分布,得到了许多重要的结论:

$$\sum_{n\leqslant x}S(n,k)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{3+(-1)^k}{2k}\right)x^2+R(x,k),$$

其中 $|R(x,k)|\leqslant\frac{7k^2}{8}+\frac{5kx}{8}$;

$$\sum_{n\leqslant x}AS(n,m,k)=\frac{x^3}{3k}+\frac{1}{4}\left(1+\frac{7+(-1)^k}{2k}\right)x^2\ \frac{x^2}{4}+R_1(x,k),$$

其中 $|R_1(x,k)|\leqslant\frac{7k^2}{8}+\frac{7kx}{8}+\frac{x}{2}+\frac{x}{6k}$.

文献[4]将 Smarandache 和函数 $S(n,k)$ 做了推广,$S(n,m,k)=\sum\limits_{i=0}^{\left[\frac{m+n}{k}\right]}(n-ki)$,并给出如下均值公式:

$$\sum_{n\leqslant x}S(n,m,k)=\frac{x^3}{6k}+\frac{x^2}{4}\left(\frac{3}{4k}-\frac{1}{4}\right)x^2+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{4}+\frac{k}{12}+m+\frac{m}{2k}\ \frac{3k}{4}-\frac{m^2}{2k}\right)x+R(x,k),$$

其中 $|R(x,k)|\leqslant\frac{5k^2}{12}+\frac{km}{2}$,$[x]$ 表示高斯取整函数,即 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数.

笔者定义了一个新的 Smarandache 和函数 $AS(n,m,k)$:设 $n,k\geqslant 1$ 是 2 个整数,$m\geqslant 0$ 是任意一个

* 收稿日期:2011-12-20
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11071194);陕西省自然科学基金资助项目(SJ08A28)
作者简介:黄 炜(1961-),男,陕西岐山人,宝鸡职业技术学院基础部教授,硕士,主要从事数论及特殊函数研究.

给定的非负整数，则广义 Smarandache 和函数 $AS(n,m,k)$ 定义为 $AS(n,m,k)=\sum_{i=0}^{\left[\frac{m+n}{k}\right]}|n-ki|$.

例如，

$$AS(7,9,2)=|7|+|7-2|+|7-4|+|7-6|+|7-8|+|7-10|+|7-12|+|7-14|+|7-16|=41,$$

$$AS(7,3,2)=|7|+|7-2|+|7-4|+|7-6|+|7-8|+|7-10|=20,$$

$$AS(9,6,3)=|9|+|9-3|+|9-6|+|9-9|+|9-12|+|9-15|=27,$$

$$AS(15,5,4)=|15|+|15-4|+|15-8|+|15-12|+|15-16|+|15-20|=42.$$

$AS(n,m,k)$ 可以反映正整数 n 在 k 的倍数数列中的绝对分布性质.

另外，在数列 $\{AS(n,m,k)\}$ 中，正整数 n,m,k 满足什么条件时，$AS(n,m,k)=kn$，能否刻画出这类整数的特征，这些都是有意义的研究内容.

定理 1 设 $k>1$ 及 $m\geqslant 0$ 为 2 个给定的整数，那么对任意整数 $x>1$，渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}AS(n,m,k)=\frac{x^3}{6k}+\frac{x^2}{4}+R(x,k),$$

其中 $|R(x,k)|\leqslant\frac{5k^2}{12}+\frac{km}{4}+\left(\frac{m^2}{2k}+m+\frac{3k}{4}-\frac{m}{2k}-\frac{1}{2}-\frac{1}{12k}\right)x$.

证明 证明中使用的解析数论和初等数论知识可参见文献[5-7]. 首先用高斯取整函数对函数 $AS(n,m,k)$ 进行简化，表示成易于求和的形式. 注意到高斯取整函数 $[x]=x-\{x\}$，于是函数 $AS(n,m,k)$ 可表示为

$$\begin{aligned}AS(n,m,k)=&\sum_{i=0}^{\left[\frac{m+n}{k}\right]}|n-ki|=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{k}\right]}|n-ki|+\sum_{i=\left[\frac{n}{k}\right]+1}^{\left[\frac{m+n}{k}\right]}|n-ki|=n+n\left[\frac{n}{k}\right]-\frac{k}{2}\left[\frac{n}{k}\right]\left(\left[\frac{n}{k}\right]+1\right)-\\&n\left(\left[\frac{m+n}{k}\right]-\left[\frac{n}{k}\right]\right)+\frac{k}{2}\left[\frac{m+n}{k}\right]\left(\left[\frac{m+n}{k}\right]+1\right)-\frac{k}{2}\left[\frac{n}{k}\right]\left(\left[\frac{n}{k}\right]+1\right)=\\&\frac{m^2+n^2+km+kn}{2k}+k\left\{\frac{n}{k}\right\}-k\left\{\frac{n}{k}\right\}^2-\left(m+\frac{k}{2}\right)\left\{\frac{m+n}{k}\right\}+\frac{k}{2}\left\{\frac{m+n}{k}\right\}^2,\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $\{x\}=x-[x]$，表示 x 的分数部分，$0\leqslant\{x\}<1$.

对任意整数 $x>1$，对(1)式的第一部分求和，并应用 Euler 求和公式，得

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{m^2+n^2+km+kn}{2k}=\frac{x^3}{6k}+\frac{x^2}{4}+\frac{m^2+km}{2k}x.\tag{2}$$

对(1)式的第二、三部分求和并注意到估计式 $0\leqslant k\left\{\frac{n}{k}\right\}-k\left\{\frac{n}{k}\right\}^2\leqslant\frac{k}{4}$，有

$$\sum_{n\leqslant x}\left(k\left\{\frac{n}{k}\right\}-k\left\{\frac{n}{k}\right\}^2\right)\leqslant\frac{k}{4}x.\tag{3}$$

设 $x=k\left[\frac{x}{k}\right]+r,0\leqslant r<k$，于是对(1)式的第四部分求和，并注意到当 n 通过模 k 的完全剩余系时，$m+n$ 也通过模 k 的完全剩余系，于是由分数部分函数 $\{x\}$ 的性质，可得

$$\begin{aligned}&\sum_{n\leqslant x}\left(m+\frac{k}{2}\right)\left\{\frac{m+n}{k}\right\}=\left(m+\frac{k}{2}\right)\sum_{n\leqslant x}\left\{\frac{m+n}{k}\right\}=\left(m+\frac{k}{2}\right)\left(\sum_{0\leqslant i\leqslant\left[\frac{x}{k}\right]-1}\sum_{ik\leqslant n\leqslant(i+1)k}\left\{\frac{m+n}{k}\right\}+\right.\\&\left.\sum_{k\left[\frac{x}{k}\right]<i\leqslant x}\left\{\frac{m+n}{k}\right\}\right)=\left(m+\frac{k}{2}\right)\sum_{i=1}^{k-1}\left[\frac{x}{k}\right]\frac{i}{k}+\left(m+\frac{k}{2}\right)\sum_{k\left[\frac{x}{k}\right]<i\leqslant x}\left\{\frac{m+n}{k}\right\}=\\&\left(m+\frac{k}{2}\right)\left[\frac{x}{k}\right]\frac{1}{k}\frac{k(k-1)}{2}+R_1(x,k)=\\&\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(m+\frac{k}{2}\right)x+R_1(x,k),\end{aligned}\tag{4}$$

其中 $|R_1(x,k)| \leqslant \left(m+\frac{k}{2}\right)\sum_{i=1}^{k-1}\frac{i}{k} \leqslant \frac{k}{2}\left(m+\frac{k}{2}\right)$.

对(1)式的第五部分求和，并注意到完全剩余系及分数部分函数 $\{x\}$ 的性质，可得

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{k}{2}\left\{\frac{m+n}{k}\right\}^2=\frac{k}{2}\sum_{n\leqslant x}\left\{\frac{m+n}{k}\right\}^2=\frac{k}{2}\left(\sum_{0\leqslant i\leqslant\left[\frac{x}{k}\right]-1}\ \sum_{ik\leqslant n\leqslant(i+1)k}\left\{\frac{m+n}{k}\right\}^2+\sum_{k\left[\frac{x}{k}\right]<i\leqslant x}\left\{\frac{m+n}{k}\right\}^2\right)=$$
$$\frac{k}{2}\left[\frac{x}{k}\right]\sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{i}{k}\right)^2+\frac{k}{2}\sum_{k\left[\frac{x}{k}\right]<i\leqslant x}\left\{\frac{m+n}{k}\right\}^2=\frac{k}{2}\left[\frac{x}{k}\right]\frac{1}{k^2}\frac{k(k-1)(2k-1)}{6}+$$
$$\frac{k}{2}\sum_{k\left[\frac{x}{k}\right]<i\leqslant x}\left\{\frac{m+n}{k}\right\}^2=\frac{1}{12}\left(3k-3-\frac{1}{k}\right)x+R_2(x,k), \tag{5}$$

其中 $|R_2(x,k)| \leqslant \frac{k}{2}\sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{i}{k}\right)^2 \leqslant \frac{k^2}{6}$.

结合估计式(2)至(5)及恒等式(1)，立刻得到定理 1 中的渐近公式，即定理 1 得证.

参考文献：

[1] 王建平. 一类包含 Smarandache 和函数的 Dirichlet 级数 [J]. 陕西师范大学学报：自然科学版，2010，38(5)：14-17.

[2] 陈　姣. 一类包含 Smarandache 和函数的 Dirichlet 级数 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2011，36(1)：39-43.

[3] 赵院娥. 关于 Smarandache 和的均值 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2011，36(1)：44-47.

[4] 李梵蓓. 关于广义 Smarandache 和的均值 [J]. 内蒙古师范大学学报：自然科学汉文版，2010，39(6)：555-557.

[5] SMARANDACHE F. Only Problems，Not Solutions [M]. Chicago：Xiquan Publishing House，1993.

[6] TOM M APOSTOL. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York：Springer-Verlag，1976.

[7] 张文鹏. 初等数论 [M]. 西安：陕西师范大学出版社，2007.

On the Mean Value of Generalized Smarandache Summands Function

HUANG Wei

(Department of Basic Courses，Baoji Vocational and Technical College，Baoji 721013，Shaanxi China)

Abstract：The main purpose of this paper is using the elementary method，analytic method and the properties of the Gauss function to study the mean value properties of $AS(n,m,k)$，and give an interesting asymptotic formula for it.

Key words：generalized Smarandache summands function；mean value；elementary method；analytic method；asymptotic formula

（责任编辑　向阳洁）